قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

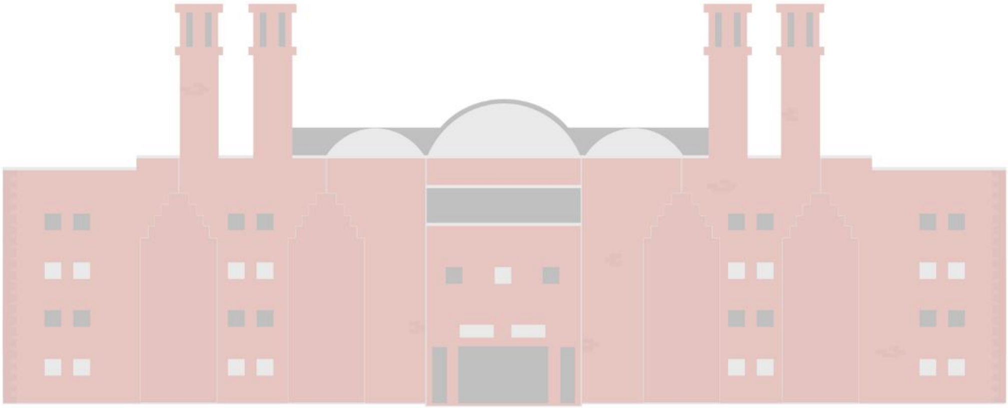
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الثالث عشر

10 صفحات



الدكتور: **معاذ عبد المجيد**

التاريخ: **29/10/2014**

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

المحاضرة ١٢

مثال: أثبت أن $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

$$\overline{\sin z} = \overline{\frac{1}{2\iota}\left(e^{\iota z} - e^{-\iota z}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\overline{e^{\iota z}} - \overline{e^{-\iota z}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}\right) = \sin \bar{z}$$

٣- التوابع المثلثية العكسية:

$$\omega = \sin^{-1} z = arc \sin z \quad : ¢ \ \to \ ¢$$

$$z = \sin \omega = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right) \Rightarrow 2iz = e^{i\omega} - e^{i\omega}$$

$$2iz = t - \frac{1}{t}$$

$$2izt = t^2 - 1 \ \Rightarrow \ \ t^2 - 1 - (2iz)t = 0$$

$$\Delta = (-2iz)^2 - 4(1)(-1) = -4z^2 + 4$$

$$t = \frac{2iz \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} = e^{i\omega}$$

$$i\omega = \ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right) \Rightarrow \omega = \frac{\ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\,\right)}{i}$$

$$\omega = \frac{1}{i}\ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\omega = \sin^{-1} z = arc \sin z$$

التعيين الرئيسي ل $\sin^{-1} z$ هو $\frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

نقاط التفرع: $z = \pm 1$

٤-التوابع القطعية العكسية:

هي توابع تُنسب للتابع الأسي

cosh

$$\omega = \cosh^{-1} z = ch^{-1}z = arc\cosh z \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega}) \Rightarrow e^{\omega} + e^{-\omega} = 2z \ , \ e^{\omega} = t$$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2z \ \Rightarrow t^2 - 2zt + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2z)^2 - 4 = 4z^2 - 4$$

$$\Rightarrow t = \frac{2z \mp \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z \mp \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\omega = \cosh^{-1} z = \ln\left(z \mp \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$z^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow (z = \mp 1)$ نقطتي التفرع

sinh

$$\omega = \sinh^{-1} z = \ln\left(z \mp \sqrt{z^2 + 1}\right) \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$(z = \mp i)$ نقطتي التفرع

tanh

$$\omega = \tanh^{-1} z = th^{-1}z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

تكامل التابع العقدي

ليكن Wمعرف ومستمر عل $W = f(z) = u + iv \ : \mathcal{D}$

وليكن L منحني أملس يقع في الكامل داخل $\mathcal{D}$

$$z = x(t) + iy(t)$$

$$t_A \le t \le t_B$$

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L udx - vdy + i\int_L udy + vdx$$

المنحني أملس أي $x'^2 + y'^2 > 0$ ، $x, y \in cl^2$

إذا كان أملس جزئيا نجزئ التكامل على الأجزاء الملساء ونجمع.

خواص التكامل :

1) $\int_{L_{AB}} f\,dz = -\int_{L_{BA}} f\,dz$

2) $\int_L (\propto f + \beta g)dz = \propto \int_L f\,dz + \beta \int_L g dz$

3) $\int_{L_1 \cup L_2} f\,dz = \int_{L_1} f\,dz + \int_{L_2} f\,dz$

4) $||f(z)|| < m$

$\left|\left|\int_L f(z)dz\right|\right| \leq ml$: L طول l

5) $l = \int_L ||dz||$: l طول معين

مثال (١) : استنتج محيط الدائرة

$$\{x^2 + y^2 = a^2 \qquad x = a\,cost\,, y = a\,sint\,; 0 < t \leq 2\pi\}$$

$$z = a\cos t + i\,a\sin t \;\Rightarrow z = ae^{it}$$

$$dz = i\,ae^{it}\,dt$$

$$\Rightarrow ||dz|| = adt \Rightarrow l = \int_l ||dz|| = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a$$

مثال (٢) إضافي:

أحسب التكامل : $\int (z-i)^n dz : ||z-i|| = 2$

الحل : التكامل على دائرة مركزها $(0,i)$ ونصف قطرها 2 .

$$||z-i|| = 2 \Rightarrow x = 2cost \qquad , \qquad y = 2sint + 1$$

$$: 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z - i = 2e^{it} \Rightarrow z = i + 2e^{it} = i + 2\cos t + 2i\sin t$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left(2e^{it}\right)^n 2ie^{it} dt$$

$$I = 2^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \ldots\ldots\ldots 1$$

$$I = 2^{n+1}\, i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = \frac{2^{n+1} i}{n+1}\left[e^{it(n+1)}\right]_0^{2\pi} : n \neq -1$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+1}(+1-1) = 0$$

حيث :

$$e^{i2a(n+1)} = \cos[2\pi(n+1)]\, isin[2\pi(n+1)] = 1$$

$$e^{2\pi} = 1$$

عند $n = -1 \Leftarrow$ هذا التكامل غير صحيح من ١:

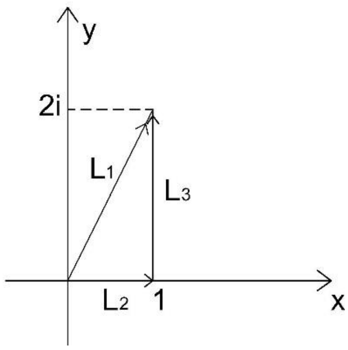
$$I = 2^0 i \int_0^{2\pi} e^0 dt = i\pi = \oint \frac{dz}{z-i} : ||z-i|| = 2$$

مثال (٣) :

احسب $I = \int_L Re\,(z) dz$ حيث L منحني يصل بين النقطتين 0و ١+2i

١) على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

٢) على الخط المنكسر المبين في الشكل .



الحل :

١) $l_1 : y = 2x : 0 \leq x \leq 1$

لنكتب معادلة L عقديا :

$$z = x + i2x = (1+2i)x$$

$$Re(z) = x \qquad , \qquad dz = (1+2i)dx$$

$$I = \int_0^1 x(1+2i)\, dx = \left[\frac{1+2i}{2} x^2\right]_0^1 = \frac{1+2i}{2}$$

٢) $l_2 : y = 0 : \ 0 \leq x \leq 1 \ \Rightarrow z = x : 0 \leq x \leq 1$

٣) $l_3 : x = 1 : 0 \leq y \leq 2 \ \Rightarrow z = 1 + iy : 0 \leq y \leq 2$

وحسب خواص التكامل

$$I=\int_{L_2\cup L_3} f(z)dz=\int_{L_2} f(z)dz+\int_{L_3} f(z)\,dz$$

$$I=\int_0^1 x\,dx+\int_0^2 idy=\frac{1}{2}+2i$$

نلاحظ أن نتيجة التكاملين مختلفين مع أن كليهما يصلان بين النقطة OA

مبرهنة كوشي :

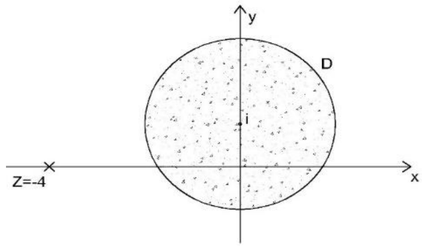
اذا كان $f(z)$ تحليلي في المنطقة D المحاطة بالمنحني Γ (مغلق بسيط ومستمر) وبالتالي :

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{fdz=0}$$

ملاحظة: إن شرط مبرهنة كوشي (f تحليلي) هو شرط لازم وغير كافي .

ملاحظة: إذا كان $\oint_{\Gamma} f dz=0$ فإن هذا لا يعني أن f تحليلي

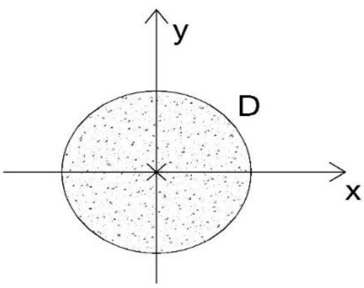
مثال: احسب التكامل $\boldsymbol{I=\oint \frac{z.dz}{(z+4)^3}}$ على الدائرة= $\boldsymbol{D:\|z-i\|}$ **2**



الحل: $z=-4$ نقطة شاذة وهي لا تنتمي إلى الدائرة D إذا f تحليلي في كامل الدائرة وبالتالي يمكن تطبيق مبرهنة كوشي أي

$$I=\oint_D \frac{z.dz}{(z+4)^3}=0$$

مثال: $\boldsymbol{I=\oint_D \frac{dz}{z^2}\ :D:\|z\|=1}$



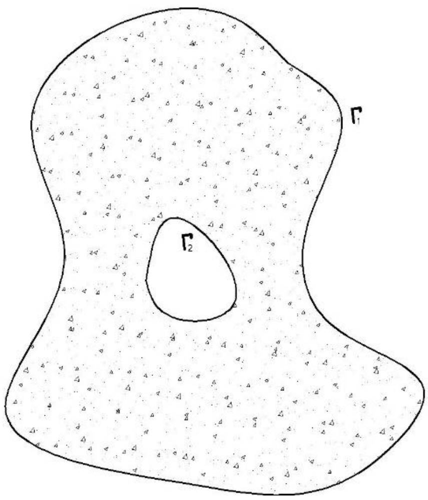
$z=0$ نقطة شاذة تقع داخل الدائرة D

$f=\frac{1}{z^2}$ غير تحليلي في $\|z\|\le 1$ ولا يمكن تطبيق مبرهنة كوشي

نتائج مبرهنة كوشي

- **المنحنيات المتكافئة تحليليا:**

$f(z)$ تحليلي في المنطقة D محصورة بين المنحنين Γ_2, Γ_1 (احداهما ضمن الاخر)



$$\oint_{\Gamma_1} f dz = \oint_{\Gamma_2} f dz$$

نقول إن Γ_2, Γ_1 متكافئتان تحليليا بالنسبة لـ f

تعميم

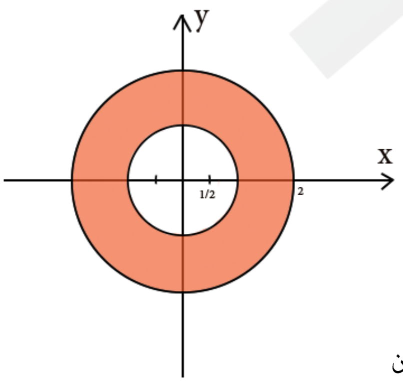
إذا كان Γ يحوي a منحني

$$\oint_{\Gamma} f dz = \sum_{n=1}^{a} \oint_{\Gamma_n} f dz$$

نهاية المحاضرة ١٢

مثال: هل المنحنيان $\|z\| = 1$, $\|z\| = 2$ متكافئان تحليليا لـ

$$f = \frac{1}{z\cos(\pi z)}$$



بما أن البسط تحليلي والمقام جداء تحليلين فالتابع f تحليلي في مجموعة تعريفه

$$z = 0 \Rightarrow 0 \begin{cases} z = 0 \\ cos\pi z = 0 \Rightarrow \pi z = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow z = \frac{1}{2} + k, k \in z \end{cases}$$

نلاحظ أن التابع f تحليلي في المنطقة المحصورة بين الدائرتين $\|z\| = 1$, $\|z\| = 2$ عدا النقطتين $\{\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\}$ وبالتالي المنحنيان غير متكافئان تحليلياً بالنسبة ل f.

• استقلال التابع عن المسار (التكامل غير المحدد):

ليكن f تحليلي في D ولتكن L منحني مفتوح وموجه يقع بالكامل داخل D يصل بين النقطتين A و B عندئذ $\int_L f(z)dz$ مستقل عن طريق الواصل بين A و B شرط أن يكون الطريق داخل D.

$$\int_L f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = F[B] - F[A]$$

مثال: أحسب التكامل $\boldsymbol{I = \int_L \sin z\, dz}$

حيث L النصف العلوي للدائرة : $\boldsymbol{||z|| = \frac{\pi}{2}}$

الحل: $f = \sin z$ تحليلي في $\mathbb{C}$ (تابع أولي لا يحتاج إلى برهان)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin z\, dz = [-\cos z]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

• صيغ كوشي التكاملية.

ليكن f تحليلي في المنطقة المغلقة D المحاطة بالمنحني البسيط والمستمر L

إذا كانت a نقطة داخلية من D فإن:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz$$

تدل هذه الصيغة على أن المشتق النوني لـ f موجود في كل نقطة داخل D وبالتالي فإن المشتق بالمرتبة $n-1$ مستمر داخل D

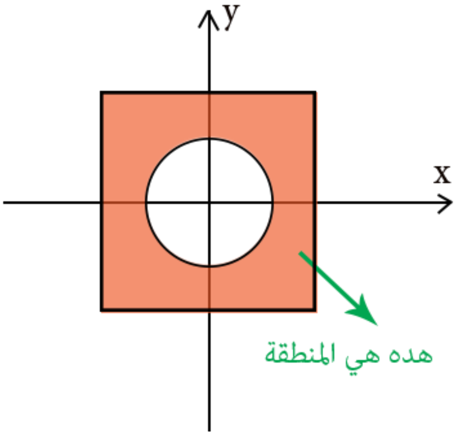
أي أن وجود المشتق من المرتبة الأولى (f تحليلي) هو شرط كافي لوجود واستمرار جميع المشتقات داخل D.

مثال: ارسم تكامل $\boldsymbol{I = \oint_{L_1} \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz}$ في المربع الذي رؤوسه النقاط $\boldsymbol{\pm 2, \pm i}$

إن التابع $1+\frac{1}{z}$ تحليلي في $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ لذا لا يمكن استخدام مبرهنة كوشي (لأن التابع تحليلي داخل L_1 عدا النقطة $z=0$)

لو رسمنا دائرة L_2 مركزها النقطة o ونصف قطرها ١ (لا يهم نصف قطرها لكن يفضل أن يكون ١ إذا أمكن)

إن f تحليلي في المنطقة المحصورة بين L_2 و L_1 والمنحنيين بسيطين ومستمرين لذا يمكن استخدام مبرهنة المنحنيات المتكافئة تحليلياً



$$\oint_{L_1}\left(1+\frac{1}{z}\right)dz=\oint_{L_2}\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$$

$$L_2: z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi,$$

$$dz=ie^{it}dt$$

$$I=\int_0^{2\pi}(1+e^{-it})ie^{it}dt=\left[e^{it}+it\right]_0^{2\pi}$$

$$=\left(e^{i2\pi}-1\right)+i(2\pi-0)=2\pi i$$

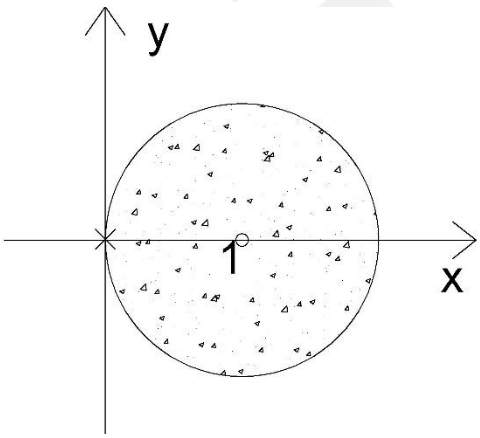
أمثلة:

١. **ناقش مستعينا بالرسم إمكانية استخدام صيغ كوشي التكاملية في حساب المشتقات النونية للتوابع التالية:**

a)- $\boldsymbol{f(z)=z+\frac{1}{z}}$

في المنطقة $\boldsymbol{\|z-1\|<1}$

الحل: التابع f تحليلي في $\mathbb{C}^*$



إن من شروط المبرهنة(صيغ كوشي التكاملية) أن تكون المنطقة مغلقة لذلك

نأخذ المنطقة $\|z-1\|\le 1$

إن f غير تحليلي في كامل المنطقة المغلقة $\|z-1\|\le 1$ وبالتالي لا

يمكن استخدام صيغ كوشي التكاملية .

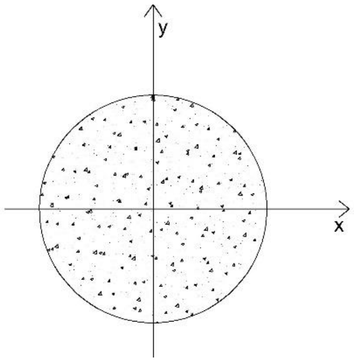
---

b)- $\boldsymbol{f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi}$

في المنطقة $||z|| < 2$

بما أن $f(z)$ معطى بدلالة x, y نستخدم معادلات كوشي_ريمان لمعرفة فيما اذا كان f تحليلي (لا يمكننا العودة إلى التوابع الأولية لمعرفة اذا ما كان التابع تحليلي أو غير تحليلي).

$$u'_x = 2x \quad , \quad v'_x = 2y$$
$$u'_y = -2y \quad , \quad v'_y = 2x$$



كوشي_ريمان محققة وبالتالي f تحليلي في كامل $\mathbb{C}$ وهو تحليل في المنطقة

المغلقة $||z|| \leq 2$

وبالتالي يمكن ايجاد المشتقات النونية باستخدام صيغ كوشي التكاملية .

---

٢. أحسب $\boldsymbol{I = \oint_L \frac{e^z}{(z-1)^4} dz}$ في الحالتين

$$\boldsymbol{a)\ L: ||z|| = \frac{1}{2}\ , b)\ L: ||z-1|| = 1}$$

الحل:

a- $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ تحليلي في $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

$\Leftarrow g$ تحليلي داخل $||z|| = 1$ فهو تحليلي في $||z|| < \frac{1}{2}$

$\Leftarrow I = 0$ حسب مبرهنة كوشي

b- $f(z) = e^z$ تحليلي في $||z-1|| \leq 1$

حسب مبرهنة صيغ كوشي التكاملية نجد

$$n = 3\ , \qquad a = 1$$

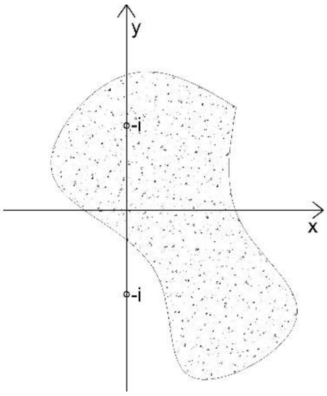
$$(e^z)'''|_{z=1} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_L \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$$

$$\oint_L \frac{e^z}{(z-1)^4}dz = \frac{\pi}{3}ie \Rightarrow I = \frac{\pi}{3}ie$$

ملاحظة: نستخدم التكامل بالرجوع الى التعريف عندما يحتوي التابع $||z||$, $Re(z), Im(z), \arg(z)$ فقط

٣. أحسب التكامل $\oint_L \frac{\cos z}{z^2+1}dz$ حيث L منحني مغلق وبسيط ومستمر بحيث تكون i داخله و $-i$ خارجه

الحل: $\frac{\cos z}{z^2+1}$ تحليلي في $\mathbb{C}\{\pm i\}$



$$g = \frac{\cos z}{(z-i)(z+i)}$$

نأخذ $f(z) = \frac{\cos z}{z+i}$

$$\Rightarrow g = \frac{f(z)}{z-i} : a = i \ , \quad n = 0$$

$$\Rightarrow f(i) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-i}dz$$

$$\Rightarrow \frac{\cos i}{2i} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-i}dz \Rightarrow \pi \cos i = \oint_L \frac{f(z)}{z-i}dz$$

$$I = \pi \cos i = \pi \cosh 1$$

"الحكمة في هذه الحياة ليست في التعثر ، إنما في القيام بعد كل مرة تتعثر فيها"

نيلسون مانديلا